Développements limités usuels

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n)$	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$	$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + o(x^{2n})$	$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$	$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$	$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$	
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \ldots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\times\cdots\times(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \ldots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\times\cdots\times(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$	

L'idéal est de connaître par coeur toutes ses formules mais il faut savoir aussi les retrouver rapidement. Le point de départ est la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n$$

valable pour tout $x \neq 1$. On la démontre en développant directement le produit $(1-x)(1+x+\ldots+x^n)$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$, on a $\frac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ et ainsi,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n).$$

En remplaçant x par $-x$ et $\pm x^2$ (qui tendent bien vers 0 quand $x \to 0$), on obtient immédiatement

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n);$$
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n});$$
$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + o(x^{2n}).$$

En intégrant les deux premières, on a

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1});\\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

On garde bien en mémoire que le développement limité d'une fonction paire (resp. impaire) n'a que des termes de degrés pairs (resp. impairs).

Pour les autres formules, on peut partir de la formule de Taylor pour les polynômes :

$$\text{si } \; P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \; \text{ alors } \; a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \; \text{ pour tout } k \in [\![0,n]\!].$$

Cela se démontre en dérivant directement le polynôme. Cette formule se généralise à toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$. C'est la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Appliquée à la fonction exponentielle (dont toutes les dérivées en 0 valent 1), cela donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

À l'ordre $2n+1$ et en prenant les parties paires et impaires (*i.e.* en calculant $\frac{f(x) \pm f(-x)}{2}$), on a

$$\begin{aligned}\mathrm{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});\\ \mathrm{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

De même, on a

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{3!} + \ldots + i^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

donc en prenant parties réelle et imaginaire, on trouve

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n});\\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}).\end{aligned}$$

On peut aussi retrouver cela avec la formule de Taylor-Young.

En prenant $f(x) = (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque et puisque $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ (il y a k facteurs constants dans le produit), on obtient finalement

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)\times\cdots\times(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

donc en particulier, pour $\alpha = \pm\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + \tfrac{x^3}{16} + \ldots + \tfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\times\cdots\times(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);\\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \ldots + \tfrac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\times\cdots\times(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).\end{aligned}$$