Feuille d'exercices n° 17 : géométrie plane

Exercice 1. Soient A, B et C, trois points du plan. Montrer que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Retrouver, à l'aide de cette relation, le fait que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2.

1. Montrer que les médiatrices d'un triangle non plat sont concourantes.

2. Montrer qu'étant donnés trois points non alignés du plan, il existe un unique cercle passant par ceux-ci.

Exercice 3. ABC est un triangle. Notons $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ les longueurs de ses côtés.
Notons également α, β et γ des mesures des angles $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}}\right)$.
Construire un triangle correspondant aux données suivantes et calculer, parmi les réels a, b, c, α, β, γ ceux qui manquent :

1. $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$;

2. $a = 8$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 4. Soit M le point d'abscisse α de la droite (D) d'équation $y = x$. Soient $A(0, 1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
Étudier suivant les valeurs de α la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM}$.

Exercice 5. On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère le point $\Omega(1, -1)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère. Est-il direct ? Est-il orthogonal ?

2. Dans le reprère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ et le point $A(5, 6)$.
   Calculer leurs coordonnées dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

3. Déterminer une équation dans $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ du cercle de centre 0 et de rayon 1.

Exercice 6. La formule de Héron.
Soit ABC un triangle non plat. On pose $a = BC, b = AC, c = AB$. On appelle encore (respectivement) α, β, γ une mesure en radian des angles non orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
$((\alpha, \beta, \gamma)$ sont donc dans l'intervalle $]0, \pi[)$.

1. Montrer $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ (formule d'Al-Kashi).

2. Écrire $\cos \alpha$ puis $\sin \alpha$ en fonction de a, b, c.

3. En déduire $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$.

Exercice 7. Déterminer toutes les équations possibles (cartésienne et paramétrique) des droites suivantes :

1. droite d'équation cartésienne $2x - y + 3 = 0$.

2. droite passant par les points $A(1;2)$ et $B(5;10)$.

3. droite orthogonale à la précédente et passant par $C(-1,3)$.

4. droite passant par $D(1,1)$ et ayant pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 8. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation cartésienne $3x + y - 4 = 0$, la droite $\mathcal{D}_2$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 4t - 3 \end{cases}$ et la droite $\mathcal{D}_3$ d'équation paramétrique $\begin{cases} x = -3t + 5 \\ y = 4t - 1 \end{cases}$

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C intersections de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$, et $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

2. Déterminer une mesure de l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.

3. Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}_1$. Utiliser cette distance pour calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 9. On considère les droites $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x = mt + 1 \\ y = -t + 2 \end{cases}$, et $\mathcal{D}'$: $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = (m-2)t + 3 \end{cases}$, où m est un paramètre réel.

1. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre m les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un unique point.

2. Dans le cas où elles s'intersectent en un unique point, déterminer les coordonnées du point d'intersection.

3. Dans le cas contraire, que dire des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$?

Exercice 10. Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$ non plat tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ainsi qu'un point P différent de B, D. On suppose que la parallèle à (AB) menée par P coupe (AD) en E et (BC) en F, et que la parallèle à (AD) menée par P coupe (AB) en G et (CD) en H.
Soit $\mathcal{R}$ le repère cartésien $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$; on appelle (λ, μ) les coordonnées de P dans celui-ci.

1. Faire une figure, et donner les coordonnées de tous les points dans le repère $\mathcal{R}$.

2. Donner les équations cartésiennes des droites (FG), (EH) et (AC) dans $\mathcal{R}$.

3. Montrez que ces trois droites sont concourantes ou parallèles.

Exercice 11. Dans le plan, on considère $\mathcal{C}$, la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$ et la droite $\mathcal{D}$: $3x - 4y - 5 = 0$. Soit A un point du graphe de f, d'abscisse x.

1. Déterminer la distance entre A et $\mathcal{D}$.

2. Pour quelle valeur de x cette distance est-elle minimale ? On notera x_0 cette valeur.

3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_0.

4. Montrer que la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 12. Donner pour chacun des cercles suivants, leur centre et leur rayon :

1. $x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$

2. $x^2 + y^2 - \sqrt{12}x + 2y = 0$

Exercice 13.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_1$ de diamètre $[AB]$, où $A(3,1)$ et $B(7,-1)$.
2. Soit l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points $M(x,y)$ du plan tels que : $x^2+y^2-8x+10=0$. Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Exercice 14. Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan $\mathcal{P}$.

1. Soit $\overrightarrow{u} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = -\sqrt{3}\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$. Montrer que $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère de $\mathcal{P}$.
2. Soit M de coordonnées (x,y) dans le repère $\mathcal{R}$ et de coordonnées (x',y') dans $\mathcal{R}'$. Écrire (x,y) en fonction de (x',y').
3. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points d'équation cartésienne $3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2+\frac{4}{3}\sqrt{3}x-4y=0$ dans $\mathcal{R}$. Donner une équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$ et tracer $\mathcal{C}$.

Exercice 15. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Tracer les éléments donnés dans l'exercice et déterminer l'équation cartésienne du cercle C défini par :

1. C est le cercle de centre $I(3,-1)$, tangent à la droite $\mathcal{D}\colon 2x-3y+4=0$;
2. C est le cercle passant par $A(1,-2)$ et $B(2,1)$ et tangent à la droite $\mathcal{D}\colon x-y-1=0$.

Exercice 16. Soit A et B deux points du plan, I milieu de $[AB]$. On considère la fonction :

$$f\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R} \qquad \text{telle que} \qquad f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

1. Quelle est la ligne de niveau 0 de f ?
2. Pour un point M du plan, montrer que : $f(M) = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.
3. Déterminer les lignes de niveaux k de f.

Pour s'entrainer

Exercice 17. Soient A, B deux points distincts du plan, et α un réel. Montrer que l'ensemble des points M du plan vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha[\pi]$ est une droite privée de deux points si $\alpha \equiv 0[\pi]$, un cercle sinon.

Exercice 18. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère le cercle C d'équation $x^2+y^2=1$, et le cercle C' de centre $\Omega(4,3)$ et de rayon 4.
Déterminer l'intersection de C et C'. Déterminer les droites tangentes communes aux deux cercles.

Exercice 19. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On considère le cercle C d'équation $x^2+y^2-2x-2y+1=0$. Déterminer les doites tangentes à C qui passent par le point $A(-1,2)$, celles qui passent par le point $B(2/5, 9/5)$, et celles qui passent par le point $D(1/2, 7/4)$.

Exercice 20. Dans un repère orthonormal, on considère pour un réel $\lambda > 0$ les deux cercles de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe (Oy) et de centre (λ, λ) tangent à l'axe (Ox). Déterminer les coordonnées des points d'intersection de ces cercles, et leur lieu lorsque λ décrit $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 21. On considère trois points non alignés dans le plan, et une droite (d) coupant respectivant les droites (BC), (AC) et (AB) en A', B' et C'. Par le point A', on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent respectivement en D et E la parallèle à (BC) passant par A. On souhaite prouver que les droites $(B'D)$ et $(C'E)$ sont parallèles, et on se place pour cela dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1. Faire une figure.

2. Que peut-on dire des coordonnées de B' et de C' dans le repère choisi ?

3. Déterminer en fonction de ces coordonnées une équation de (d), de (BC), puis les coordonnées des points A', D et E.

4. Conclure à l'aide d'un calcul de déterminant.

Exercice 22. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan et Ω un point du plan intérieur à $\mathcal{C}$. Menons de Ω deux droites orthogonales qui rencontrent le cercle en A et A' d'une part, et en B et B' d'autre part. Nous noterons I le milieu de $[A'B']$. Montrons que la médiane issue de Ω dans le triangle $\Omega A'B'$ est hauteur du triangle ΩAB.

1. Méthode analytique : prendre un repère d'axes (AA') et (BB').

2. Méthode par le produit scalaire : Montrer que les angles géométriques en A' et en B sont égaux. En déduire : $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A'} = \overrightarrow{\Omega B} \cdot \overrightarrow{\Omega B'}$.

3. Méthode par les angles orientés : utiliser (et justifier)
$\left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{BB'}\right) + \left(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{AA'}\right) + \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}\right) \quad [2\pi]$.

Exercice 23. Dans un repère orthonormal direct, on considère les points $A(-1,-1)$, $B(2,3)$ et $C(3,-3)$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.

2. En déduire la distance de A à la droite (BC).

3. Déterminer une équation de la droite (AB).

4. En déduire la longueur de la hauteur issue de C, et retrouver ainsi l'aire du triangle ABC.

Exercice 24. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x + 5y - 1 = 0$, et le point $A(a,b)$. Donner la représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{D}$, puis déterminer les coordonnées de A_1 projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ et de A' symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$.

Exercice 25. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{l} 3mx + 3y = \frac{1}{2} \\ 2x + (m-1)y = \frac{m}{3} \end{array}\right.$ où m est un paramète réel.

1. Déterminer pour quelles valeurs de m le système (S) a une solution unique, et calculer cette solution dans ce cas.

2. Résoudre le système dans les cas où il n'y a pas solution unique.

Exercice 26. Dans un parallélogramme $ABCD$, prouver la relation $AC^2+BD^2 = AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$.

Exercice 27. Soit ABC est un triangle.Notons $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ les longueurs de ses côtés. Notons également α, β et γ des mesures des angles $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$.
Construire un triangle correspondant aux données suivantes et calculer, parmi les réels a, b, c, α, β, γ, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ et $\cos(\gamma)$ ceux qui manquent :

1. $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 4$;

2. $a = 8$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$.